

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

INTRODUZIONE ALLE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

20-27 MAGGIO 1982

# 1. INTRODUZIONE

L'inclusione differenziale

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x} \in \Gamma(t, x)$$

è stata studiata per multifunzioni

$$R \times X \xrightarrow{\Gamma} X$$

a valori in spazi  $X$  localmente convessi assai generali. Tuttavia qui intendiamo considerare principalmente il caso  $X = R^n$  per avere una esposizione più semplice e anche perché si hanno i risultati più completi. Caso per caso verranno date indicazioni sulle eventuali estensioni a spazi  $X$  più generali.

Equazioni di tipo (1) si presentano nello studio di fenomeni evolutivi in cui la velocità non è univocamente determinata dallo stato (per esempi provenienti da problemi di economia cfr. Aubin [1]).

Un'altra classe notevole di equazioni di tipo (1) si incontra nella teoria del controllo per le equazioni differenziali ordinarie:  $\dot{x} = f(t, x, u)$ ,  $u \in U$ . A questo proposito osserviamo che vale il seguente

Teorema. Sia  $R^n \supset \Omega$  aperto,  $(U, \rho) =$  spazio metrico compatto,

$$[a, b] \times \Omega \times U \ni (t, x, u) \xrightarrow{f} f(t, x, u) \in R^n$$

$$[a, b] \ni t \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(t) \neq \emptyset \quad \text{compatto} \subset U$$

con  $f$   $t$ -misurabile e  $(x, u)$ -continua. Se  $\Gamma$  è misurabile (cfr. n. 3. Si può prendere  $\Gamma(t) = U$ ), sono equivalenti le seguenti affermazioni su

$x : [a, b] \rightarrow \Omega$  assolutamente continua

a) esiste  $u : [a, b] \rightarrow U$  misurabile tale che  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ ,  
 $u(t) \in \Gamma(t)$  q.d.

b)  $\dot{x}(t) \in f(t, x(t), \Gamma(t))$  q.d.

Questo risultato è dovuto a Filippov [2].

Equazioni di tipo (1) possono nascere anche come "equazioni di Hamilton generalizzate" per certi problemi di calcolo delle variazioni (cfr. Rockafellar [3]).

Anche le disequazioni differenziali del tipo  $|\dot{x} - g(t, x)| \leq f(t, x)$  si possono rappresentare nella forma (1) ponendo  $\Gamma(t, x) =$  sfera di centro  $g(t, x)$  e raggio  $f(t, x)$ , e le equazioni differenziali implicite  $f(t, x, \dot{x}) = 0$ , ponendo  $\Gamma(t, x) = \{v | f(t, x, v) = 0\}$ .

Le soluzioni qui considerate saranno in ogni caso assolutamente continue. In tal modo, già nel caso  $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$ , siamo condotti al problema della esistenza di *selezioni misurabili* per  $\Gamma$ . D'altra parte ha interesse anche la ricerca di *selezioni continue* per  $\Gamma$ , perché se  $\gamma(x) \in \Gamma(x) \subset \mathbb{R}^n$  e  $\gamma$  è continua in  $\Omega$  aperto, allora le soluzioni di  $\dot{x} = \gamma(x)$  sono soluzioni di  $\dot{x} \in \Gamma(x)$ . Qui di seguito riporteremo alcuni risultati di esistenza di selezioni continue o misurabili, dopo avere introdotto le nozioni di (semi-)continuità e misurabilità per multifunzioni.

Prima però introduciamo alcuni simboli relativi all'equazione (1):

$$T_{\Gamma}([a, b]; \xi) = \{x \in C([a, b], X) | x \text{ assolutamente continua e q.d. derivabile, } x(a) = \xi, \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ q.d.}\}$$

$$A_{\Gamma}([a, b]; \xi) = \{x(b) | x \in T_{\Gamma}([a, b]; \xi)\} \subset X$$

$$F_{\Gamma}([a, b]; \xi) = \{(t, x(t)) | x \in T_{\Gamma}([a, b]; \xi), -a \leq t \leq b\} \subset \mathbb{R} \times X$$

Ricordiamo che può essere  $x : [a, b] \rightarrow X =$  spazio di Banach as-



solutamente continua, ma non derivabile in alcun punto.

Per esempio si può prendere

$$X = C([-1,1], \mathbb{R}), \quad x(t)(\theta) = |t + \theta| \text{ con } |t|, |\theta| \leq 1$$

In questo caso  $x$  è lipschitziana.

Avremo occasione di considerare anche soluzioni, che diremo *regolari* seguendo Tolsonogov [4], tali che  $\dot{x}$  abbia al più discontinuità di prima specie (su ogni intervallo compatto sono limiti uniformi di successioni di funzioni a gradino - cfr. Dieudonné [5]).

## 2. MULTIFUNZIONI SEMICONTINUE

Il concetto di continuità per funzioni ordinarie si estende alle multifunzioni fra spazi topologici

$$X \xrightarrow{\Gamma} Y \quad \text{a valori } \neq \emptyset$$

nei seguenti modi:

I)  $\Gamma$  si dice *semicontinua superiormente* (u.s.c.) se verifica le condizioni equivalenti:

- a)  $\Gamma^{-1}$  (chiuso) = chiuso
- b)  $\{x | \Gamma(x) \subset \text{aperto}\} = \text{aperto}$
- c)  $\Gamma(x) \subset \Omega \text{ aperto} \Rightarrow \exists \text{ aperto } O \ni x \text{ tale che}$

$$\Gamma(x') \subset \Omega, \quad \forall x' \in O$$

Si è posto  $\Gamma^{-1}(E) = \{x | \Gamma(x) \cap E \neq \emptyset\}$ .

II)  $\Gamma$  si dice *semicontinua inferiormente* (l.s.c.) se verifica le condi-

zioni equivalenti:

a)  $\Gamma^{-1}$  (aperto) = aperto

b)  $\{x | \Gamma(x) \subset \text{chiuso}\} = \text{chiuso}$

c)  $\Gamma(x) \cap \Omega \neq \emptyset$  con  $\Omega$  aperto  $\Rightarrow \exists$  aperto  $O \ni x$  tale che

$$\Gamma(x') \cap \Omega \neq \emptyset, \quad \forall x' \in O$$

Consideriamo alcuni esempi.

Prendiamo la funzione ordinaria

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

e poniamo

$$F_{\pm}(x) = f(x) \pm [0, +\infty[$$

Allora si ha

$$f \text{ l.s.c.} \Leftrightarrow F_- \text{ l.s.c.} \Leftrightarrow F_+ \text{ u.s.c.}$$

La funzione

$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma_1} \begin{cases} \{1\} & \text{se } x < 0 \\ \{-1, 1\} & \text{se } x = 0 \\ \{-1\} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è u.s.c., ma non l.s.c..

La funzione

$$[0, 1] \ni x \xrightarrow{\Gamma_2} \begin{cases} [0, x] & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \{1\} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è l.s.c., ma non u.s.c..

La funzione  $\Gamma$  si dirà *continua* se è sia u.s.c. che l.s.c..

Consideriamo la funzione continua

$$X \times U \xrightarrow{f} Y$$

dove  $U$  è uno spazio compatto. Allora la funzione

$$X \ni x \xrightarrow{\Gamma} \{f(x,u) | u \in U\} = f(x,U)$$

è continua. Osserviamo che la compattezza di  $U$  non serve per provare la l.s.c., ma non si può eliminare per la u.s.c., come prova l'esempio

$$[0,1] \times [0,1[ \ni (x,u) \xrightarrow{f} (x,u) \in \mathbb{R}^2$$

in cui  $U = [0,1[$  e

$$f(0,U) \subset \{(x,u) | x+u < 1\} \not\supset f(x,U), \quad \forall x > 0$$

Alcune delle proprietà della continuità ordinaria si trasportano alle m-funzioni come indicato nel seguente

Teorema. Valgono le seguenti affermazioni per

$$X \xrightarrow{\Gamma} Y \text{ a valori } \neq \emptyset$$

- i) Se  $\Gamma$  è u.s.c. oppure l.s.c. e  $\Gamma(x)$  è connesso per ogni  $x \in X$ , allora  $\Gamma(\text{connesso}) = \text{connesso}$ .
- ii) Se  $\Gamma$  è u.s.c. e  $\Gamma(x)$  è compatto per ogni  $x \in X$ , allora  $\Gamma(\text{compatto}) = \text{compatto}$  (la funzione  $\Gamma_2$  considerata sopra mostra che ciò è falso



per  $\Gamma$  l.s.c.).

iii) (*Grafico chiuso*). Se  $\Gamma$  è u.s.c.,  $\Gamma(x)$  è chiuso per ogni  $x \in X$  e  $Y$  è uno spazio  $T_3$  (regolare), allora  $\Gamma$  è chiuso in  $X \times Y$  (la funzione  $\Gamma_2$  precedente mostra che ciò è falso per  $\Gamma$  l.s.c.). Se  $\Gamma$  è chiuso in  $X \times Y$  e  $Y$  è compatto, allora  $\Gamma$  è u.s.c..

iv) Componendo funzioni u.s.c. (l.s.c.) si ottengono funzioni dello stesso tipo:

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(\Gamma_2(x)) = \bigcup_{y \in \Gamma_2(x)} \Gamma_1(y)$$

Per la dimostrazione delle affermazioni precedenti si veda Aubin-Cellina [6] oppure Smythson [7].

Di particolare interesse per le inclusioni differenziali è il caso  $(Y, \rho) =$  spazio metrico e  $\Gamma$  a valori compatti  $\neq \emptyset$ . Ora sullo spazio

$$\text{comp}(Y) = \{A \subset Y \mid \emptyset \neq A \text{ compatto}\}$$

si può introdurre la *distanza di Hausdorff*

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset B_\epsilon, B \subset A_\epsilon\}$$

essendo  $A_\epsilon = \{y \in Y \mid \rho(y, A) = \inf_{z \in A} \rho(y, z) \leq \epsilon\}$ .

Le seguenti proprietà dello spazio metrico  $(Y, \rho)$  si trasportano allo spazio metrico  $(\text{comp}(Y), h)$ :

- compattezza
- totale limitatezza (precompattezza)
- completezza
- separabilità
- connessione.

Inoltre la *topologia* generata dalla distanza di Hausdorff ha una base costituita dagli insiemi

$$\{A \subset Y \mid \emptyset \neq A \subset \Omega_0, A \cap \Omega_i \neq \emptyset \text{ per } 1 \leq i \leq n\}, \Omega_i \text{ aperto in } Y.$$

La multifunzione  $\Gamma : X \longrightarrow Y$ , a valori  $\neq \emptyset$  compatti, si può pensare come funzione ordinaria

$$X \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(Y)$$

e la sua *continuità rispetto alla distanza di Hausdorff* coincide con la continuità precedentemente definita.

Per la dimostrazione di queste affermazioni cfr. Bourbaki [8], Castaing-Valadier [9].

Supponiamo ora che  $Y$  sia uno *spazio localmente convesso* e  $T_2$  (Hausdorff) e  $\Gamma$  a valori convessi ed enunciamo alcuni risultati utili nella trattazione delle inclusioni differenziali:

- i) (*Punto unito*). Se  $Y \supset C \neq \emptyset$  compatto e convesso e  $\Gamma : C \longrightarrow C$  è u.s.c. a valori  $\neq \emptyset$  convessi e chiusi, allora esiste  $x \in C$  tale che  $x \in \Gamma(x)$ . (cfr. Smithson [7]).

Osserviamo che se  $Y$  è anche metrizzabile si può sostituire l'ipotesi di convessità di  $\Gamma(y)$  con l'ipotesi di "aciclicità" (cfr. Lasry-Robert [10]).

- ii) (*Selezioni continue*). Sia  $X$  uno spazio metrico,  $Y$  uno spazio di Banach,  $\Gamma : X \longrightarrow Y$  l.s.c. a valori  $\neq \emptyset$  convessi e chiusi. Allora esiste  $\gamma : X \rightarrow Y$  continua tale che

$$\gamma(x) \in \Gamma(x), \quad x \in X$$

Questo risultato è dovuto a Michael [11] (cfr. anche Aubin-Cellina [6]).

L'esempio



$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma_3} \begin{cases} \{-1\} & \text{per } x < 0 \\ [-1,1] & \text{per } x = 0 \\ \{1\} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

mostra che non si può sostituire la l.s.c. con la u.s.c..

Esiste  $[0,1] \ni t \mapsto \Gamma(t) \in \text{comp}(R^2)$  continua, ma priva di selezioni continue (cfr. Hermes 17, pag. 158 - Ex: 2.1).

iii) (Approssimazione). Sia  $X$  uno spazio metrico,  $Y$  uno spazio di Banach,

$\Gamma : X \rightarrow Y$  u.s.c. a valori  $\neq \emptyset$  compatti e convessi tale che

$\Gamma(X) \subset K = \text{compatto}$ . Allora esiste una successione di  $m$ -funzioni

$$X \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{\Gamma_n} K \subset Y \text{ a valori } \neq \emptyset \text{ compatti e convessi, } n=1,2,\dots$$

che verifica le condizioni

$$a) \Gamma_n(x) \supset \Gamma_{n+1}(x) \supset \dots \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(x) = \Gamma(x)$$

$$b) \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N}: \Gamma_n(x) \subset \Gamma(x) + \varepsilon B \text{ per } n \geq v$$

c) ogni  $\Gamma_n$  è del tipo

$$X \ni x \mapsto \sum_{j \in J} \psi_j(x) C_j$$

dove  $J \ni j \mapsto \psi_j$  è una partizione dell'unità in  $X$  localmente finita e localmente lipschitziana e  $\emptyset \neq C_j = \text{compatto convesso}$ . Inoltre  $B = \{y \in Y \mid \|y\| \leq 1\}$  (cfr. Haddad [12], Lasry-Robert [10]).

### 3. MULTIFUNZIONI MISURABILI

Se  $(X, \mathcal{X})$  è uno spazio misurabile ( $\mathcal{X}$  =  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$ ) e  $Y$  è uno spazio topologico, si dice che la  $m$ -funzione

$$X \xrightarrow{\Gamma} Y$$

è *misurabile* se  $\Gamma^{-1}$  (chiuso) = misurabile.

Qui ci proponiamo di esporre alcuni risultati relativi alle selezioni misurabili in condizioni particolarmente semplici. Per risultati più generali rimandiamo a Castaing-Valadier [9], Wagner [13] e [14].

i) (*Misurabilità*). Supposto  $Y$  = spazio metrico completo e separabile,

$$R \supset [a, b] \xrightarrow{\Gamma} Y \text{ a valori } \neq \emptyset \text{ compatti}$$

sono equivalenti le affermazioni

a)  $\Gamma^{-1}$  (aperto) = misurabile

b)  $\Gamma^{-1}$  (chiuso) = "

c)  $\Gamma^{-1}$  (compatto) = "

d)  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \text{comp}(Y)$  è misurabile ( $\Gamma^{-1}$  (aperto) = misurabile)

e) esiste una successione  $^h$  di funzioni misurabili  $\sigma_n : [a, b] \rightarrow Y$  tali che

$$\sigma_n(t) \in \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_j(t) | j \in N\}}$$

f) per ogni  $\epsilon > 0$  e per ogni insieme misurabile  $A \subset [a, b]$  esiste

un compatto  $K_\epsilon \subset A$  tale che  $\text{mis}(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  e  $\Gamma$  è continua su  $K_\epsilon$

g) la funzione ordinaria

$$[a, b] \ni t \rightarrow \rho(y, \Gamma(t))$$

è misurabile per ogni  $y \in Y$ .

Se si suppone inoltre  $\Gamma(t)$  = convesso  $\subset Y$  = Frechet, è equivalente

alle precedenti anche

h) la funzione

$$[a,b] \ni t \rightarrow \sup_{y \in \Gamma(t)} \langle y, y' \rangle$$

è misurabile per ogni  $y' \in Y^* =$  duale di  $Y$ .

In tutti gli enunciati precedenti si intende che la misura sull'intervallo  $[a,b]$  sia quella usuale di Lebesgue. Per la dimostrazione cfr. Castaing-Valadier [9] e anche Wagner [13], [14].

ii) (*Funzioni implicite*). Sia  $X$  uno spazio metrico compatto,  $Y$  uno spazio metrico separabile e completo,

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{\Gamma} \text{comp}(X)$$

$$[a,b] \times X \ni (t,x) \xrightarrow{h} h(t,x) \in Y$$

con  $h$   $t$ -misurabile e  $x$ -continua

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{g} Y$$

Se riesce  $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$  per ogni  $t$ , allora esiste

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{\gamma} X$$

tale che per ogni  $t$

$$g(t) = h(t, \gamma(t)), \quad \gamma(t) \in \Gamma(t).$$

Questo risultato è dovuto a Filippov [2] (cfr. anche Wagner [13]).

Nella teoria delle inclusioni differenziali ha interesse la ri



cerca di selezioni misurabili per funzioni del tipo  $t \rightarrow \Gamma(t, u(t))$ , con  $u$  funzione ordinaria, che "dipendono regolarmente dalla funzione  $u$ ". Indichiamo un risultato di questo tipo:

iii) Sia  $X$  uno spazio di Banach separabile,

$$[a, b] \times (x_0 + rB) \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(X)$$

$$\Gamma(t, x) \subset \omega(t)B, \quad 0 \leq \omega \in L^\infty$$

con  $\Gamma$   $t$ -misurabile e  $x$ -continua e sia  $K \neq \emptyset$  compatto e convesso con tenuto in  $C([a, b], x_0 + rB)$ .

Allora esiste la funzione *continua*  $g : K \rightarrow L^1([a, b], X)$  tale che per ogni  $u \in K$

$$g(u)(t) \in \Gamma(t, u(t)) \quad \text{q.d.}$$

Per questo ed altri analoghi risultati cfr. Tolstonogov [4], [15] e Antosiewicz-Cellina [36].

#### 4. EQUAZIONE $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$

Consideriamo la  $m$ -funzione

$$[0, T] \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

e poniamo per semplicità

$$T_\Gamma(T) = T_\Gamma([0, T]; 0)$$

$$A_\Gamma(T) = A_\Gamma([0, T]; 0).$$

Se  $\Gamma$  è una  $m$ -funzione qualsiasi, si dice *integrale di Aumann*  
 [16] sull'insieme misurabile  $E \subset \mathbb{R}$  l'insieme

$$\int_E \Gamma(t) dt = \left\{ \int_E \gamma(t) dt \mid \gamma \in L^1(E, \mathbb{R}^n), \gamma(t) \in \Gamma(t) \text{ q.d.} \right\}$$

Pertanto si ha

$$A_\Gamma(T) = \int_0^T \Gamma(t) dt$$

Per la nostra inclusione  $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$  vale il seguente

Teorema 1. Sia data la  $m$ -funzione  $\Gamma$  verificante le condizioni

$$[0, T] \xrightarrow[\text{mis}]{\Gamma} \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Gamma(t) \subseteq g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$$

Allora si ha

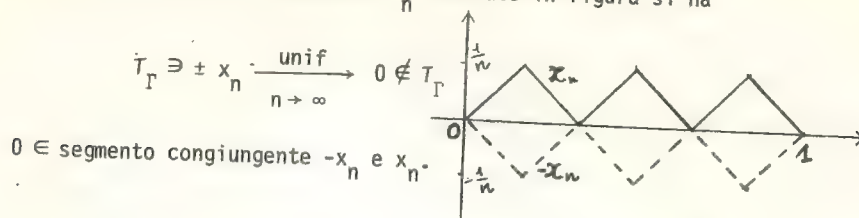
- i)  $A_\Gamma(T) = A_{\langle \Gamma \rangle}(T) \neq \emptyset$  convesso e compatto in  $\mathbb{R}^n$
- ii)  $\overline{T_\Gamma(T)} = T_{\langle \Gamma \rangle}(T) \neq \emptyset$  convesso e compatto in  $C([0, T], \mathbb{R}^n)$
- iii) (Bang-bang)  $A_\Gamma(T) = A_{\langle \Gamma \rangle^{**}}(T)$

Si è posto  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ,  $\langle \Gamma(t) \rangle =$  involucro convesso di  $\Gamma(t)$ ,  $\langle \Gamma(t) \rangle^{**} =$  insieme dei punti estremi di  $\langle \Gamma(t) \rangle$ . Per la dimostrazione cfr. Hermes [17], Castaing-Valadier [9] Theorem IV. 17.

Osservazione 1. L'insieme  $T_\Gamma(T)$  può essere non chiuso e non convesso, come mostra il semplice esempio

$$[0, 1] \ni t \xrightarrow{\Gamma} \{-1, 1\}$$

Per la successione di funzioni  $x_n$  indicate in figura si ha



Osservazione 2. L'affermazione ii) continua a valere se si sostituisce  $R^n$  con uno spazio di Banach separabile (e  $\langle \Gamma \rangle$  con  $\langle \bar{\Gamma} \rangle$ ; cfr. Tolstonogov [18]). Per la generalizzazione ad altri tipi di spazi, nel caso di  $\Gamma$  a valori anche convessi, cfr. Castaing-Valadier [9].

#### 5. EQUAZIONE $\dot{x} \in \Gamma(t, x)$

Nel seguito ci metteremo sempre in intervalli del tipo  $[0, T] \subset R$  e per questo semplifichiamo così i simboli definiti nell'Introduzione:

$$T_\Gamma(T, \xi) = T_\Gamma([0, T]; \xi), A_\Gamma(T, \xi) = A_\Gamma([0, T]; \xi), \dots$$

Ricordiamo che abbiamo posto  $\text{comp}(X) = \{A \subset X \mid \emptyset \neq A \text{ compatto}\}$ . Poniamo anche

$$\text{conv}(X) = \{A \subset X \mid \emptyset \neq A \text{ compatto e convesso}\}$$

Inoltre ricordiamo la definizione di "funzione di tipo Kamke": funzione  $\omega$  tale che



$$\left\{ \begin{array}{l} [0, T] \times [0, +\infty[ \xrightarrow{\omega} [0, +\infty[ \\ |\omega(t, x)| \leq g(t), \quad 0 \leq g \in L^1 \\ \omega(t, 0) \equiv 0 \\ 0 \leq x(t) \leq \int_0^t \omega(s, x(s)) ds, \quad x \text{ assol. cont.} \Rightarrow x(t) \equiv 0 \end{array} \right.$$

con  $\omega$   $t$ -misurabile e  $x$ -continua e crescente.

Un esempio è dato da  $\omega(t, x) = g(t)x$ .

Cominciamo con alcuni risultati per  $\Gamma$  a valori convessi. Successivamente passiamo a  $\Gamma$  a valori soltanto compatti e concluderemo con alcuni risultati sulle inclusioni  $\dot{x} \in \Gamma(t, x)$  su insiemi non (necessariamente) aperti.

Teorema 2. Sia  $\Gamma$  una  $m$ -funzione tale che

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Gamma} \text{conv}(\mathbb{R}^n)$$

ed esistano due funzioni  $\gamma$  e  $g$  per cui riesce

$$(H_1) \quad \gamma(t, x) \in \Gamma(t, x) \subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$$

con  $\gamma$   $t$ -misurabile e  $\Gamma$   $x$ -u.s.c.. Allora valgono le affermazioni

$$i) \quad \mathbb{R}^n \ni \xi \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} T_{\Gamma}(T, \xi) \neq \emptyset \text{ compatto, connesso}$$

$$ii) \quad \mathbb{R}^n \ni \xi \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} A_{\Gamma}(T, \xi), F_{\Gamma}(T, \xi) \neq \emptyset \text{ compatto, connesso}$$

iii) Per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  ed  $\eta \in \partial A_{\Gamma}(T, K)$  esiste  $x \in T_{\Gamma}(T, K)$  tale che

$$x(t) \in \partial A_{\Gamma}(t, K) \text{ per } 0 \leq t \leq T, \quad x(T) = \eta$$

Se si suppone  $\Gamma(t, \cdot)$  continua e se vale  $(H_1)$ , allora

iv) per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  e  $x \in T_\Gamma(T, K)$  tale che

$$x(t) \in \partial A_\Gamma(t, K) \text{ per } 0 \leq t \leq T \quad \text{si ha}$$

$$\dot{x}(t) \in \partial \Gamma(t, x(t)) \quad \text{q.d.}$$

Se vale  $(H_1)$  con  $g$  *limitata* e  $\Gamma$  *u.s.c.* rispetto alla coppia  $(t, x)$ , allora  
v)  $T_\Gamma(T, \xi)$  è "aciclico"

Se vale  $(H_1)$  con  $\Gamma$  *continua* nella coppia  $(t, x)$ , allora

$$\text{vi) } T_\Gamma(T, \xi) \cap C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \neq \emptyset.$$

Per le dimostrazioni di i)-iv) cfr. Davy [19], per v) cfr.

Lasry-Robert [10] e Haddad [12], per vi) cfr. Filippov [20]. Come al solito,  $B$  indica la sfera unità chiusa e  $\partial A$  indica la frontiera di  $A$ .

Osservazione 1. In Aubin-Cellina [6] sono provate le affermazioni i) e ii) con  $\mathbb{R}^n$  sostituito da uno spazio di Hilbert e nell'ipotesi che in  $(H_1)$  sia  $B =$  compatto (non più sfera-unità) e  $\Gamma$  *u.s.c.*.

Osservazione 2. Fra i risultati di Tolstonogov [4], [15], [18], [21] sono contenute le affermazioni i) e ii) con  $\mathbb{R}^n$  sostituito da uno spazio di Banach separabile se in  $(H_1)$  si suppone  $\Gamma(\cdot, x)$  misurabile,  $\Gamma(t, \cdot)$  continua e inoltre

$$h(\Gamma(t, x), \Gamma(t, y)) \leq \omega(t, \|x - y\|),$$

dove  $\omega$  è una funzione di tipo Kamke.

Osservazione 3. Castaing-Valadier [9] e Tolstonogov [22] hanno provato affermazioni di tipo i) e ii) per il caso in cui  $\mathbb{R}^n$  è sostituito da uno spazio di Banach separabile munito della sua propria topologia debole (e anche da spazi di Suslin) in ipotesi del tipo

$$\Gamma(t, x) \subset g(t)K, \quad 0 \leq g \in L^1$$

con  $\Gamma$   $t$ -misurabile e  $x$ -u.s.c. e con  $K$  convesso e debolmente compatto.

Osservazione 4. La u.s.c. da sola non è sufficiente per avere  $T_\Gamma \neq \emptyset$ , come mostra l'esempio

$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x > 0 \\ \{-1, 1\} & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il problema  $x(0) = 0, \dot{x}(t) \in \Gamma(u(t))$  non ha soluzione.

Osservazione 5. Anche l'affermazione iv) può non valere senza la continuità di  $\Gamma(t, \cdot)$ , come si vede nell'esempio (cfr. Davy [19])

$$[0, 1] \times R \ni (t, x) \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} [0, 2] & \text{se } x = t \\ \{0\} & \text{se } x \neq t \end{cases}$$

Le uniche soluzioni  $x$  del problema

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t))$$

che verificano la condizione  $x(t) \in \partial A_\Gamma(t, 0)$  sono

$$x_0 : t \rightarrow 0, \quad x_1 : t \rightarrow t$$

ed è  $\dot{x}_1(t) = 1 \notin \partial [0, 2] = \partial \Gamma(t, x_1(t))$ .

Osservazione 5. La misurabilità (e quindi la u.s.c.) di  $\Gamma(\cdot, x)$  assicura l'esistenza di  $\gamma$  come in  $(H_1)$ .



Teorema 2'. Se  $\Gamma$  verifica le condizioni

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} \text{conv}(\mathbb{R}^n)$$

$$(H'_1) \quad \gamma(t, x, u) \in \Gamma(t, x, u) \subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$$

con  $\gamma$   $t$ -misurabile e  $\Gamma(x, u)$ -u.s.c., allora si ha

$$i) \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (\xi, u) \xrightarrow[u.s.c.]{\Gamma} T_\Gamma(T; \xi, u) \neq \emptyset \text{ compatto connesso.}$$

Per la dimostrazione cfr. Davy [19]. Nel Teorema 4 vedremo come si possa mettere al posto di  $\mathbb{R}^n$  uno spazio di Banach.

Per il caso non convesso si ha il seguente

Teorema 3. Consideriamo la  $m$ -funzione

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \supset \Omega \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

con  $\Omega$  aperto. Ciascuna delle seguenti condizioni è sufficiente a garantire

$$T_\Gamma(T, \xi) \neq \emptyset$$

se  $(0, \xi) \in \Omega$  e  $T > 0$  è sufficientemente piccolo.

- i)  $\Gamma$  è l.s.c., e in questo caso esistono soluzioni "regolari";
- ii)  $\Gamma$  verifica la condizione

$$\Gamma(t, x) \subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$$

e  $\Gamma$  è  $t$ -misurabile e  $x$ -continua.

Per la dimostrazione cfr. Lojasievicz jr. [23] per i) e Kaczynski-Olech [24] per ii).

L'esempio dell'Osservazione 4 al Teorema 2 mostra che i) può cessare di valere per  $\Gamma$  u.s.c. invece che l.s.c..

Osservazione 1. In ii) è sufficiente la u.s.c. di  $\Gamma(t, \cdot)$  in ogni punto  $x_0$  tale che  $\Gamma(t, x_0) = \text{convesso}$  per ogni  $t$  (cfr. Olech [25]).

Osservazione 2. La continuità di  $\Gamma$ , rispetto alla coppia  $(t, x)$ , non è sufficiente per la u.s.c. di  $T_\Gamma$ , come ha mostrato Pianigiani [26].

La continuità non è sufficiente neanche per avere  $\bar{T}_\Gamma = T_{\langle \Gamma \rangle}$  (cfr. Teorema 1), come mostra l'esempio (dovuto a Plis, cfr. Hermes [17])

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2) &\xrightarrow{\Gamma} \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = \pm 1; v_2 = x_1^2 + \sqrt{|x_2|}\} \\ \dot{x}(t) &\in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = 0 \end{aligned}$$

Il Teorema seguente fornisce condizioni sufficienti per avere  $\bar{T}_\Gamma = T_{\langle \Gamma \rangle}$ .

Teorema 4. Sia  $X$  uno spazio di Banach separabile,  $U$  uno spazio metrico compatto. Supponiamo che  $\Gamma$  verifichi le condizioni

$$\begin{aligned} [0, T] \times X \times U &\xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(X) \\ \Gamma(t, x, u) &\subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1 \\ h(\Gamma(t, x, u), \Gamma(t, x', u)) &\leq \omega(t, \|x - x'\|) \end{aligned}$$

I) Se riesce inoltre

$$\gamma(t, x, u) \in \Gamma(t, x, u) = \text{convesso}$$

con  $\gamma$   $t$ -misurabile e  $\Gamma(x, u)$ -u.s.c., allora si ha

i)  $X \times U \ni (\xi, u) \xrightarrow{\text{u.s.c.}} T_{\Gamma}(T; \xi, u) \neq \emptyset$  compatto connesso

ii)  $X \times U \ni (\xi, u) \xrightarrow{\text{u.s.c.}} A_{\Gamma}(T; \xi, u), F_{\Gamma}(T; \xi, u) \neq \emptyset$  compatto connesso

II) Se risulta  $\Gamma(\cdot, x, u)$  misurabile,  $\Gamma(t, \cdot, \cdot)$  continua e  $g$  limitata, allora si ha

i)  $X \times U \ni (\xi, u) \xrightarrow{\text{l.s.c.}} T_{\Gamma}(T; \xi, u) \subset \overline{T_{\Gamma}(T; \xi, u)} = T_{\langle \Gamma \rangle}(T; \xi, u)$   
↑  
continua

ii) se  $\Gamma$  inoltre è continua, si ha

$X \times U \ni (\xi, u) \xrightarrow{\text{l.s.c.}} T_{\Gamma}^{(r)}(T; \xi, u) \subset \overline{T_{\Gamma}^{(r)}(T; \xi, u)} = T_{\langle \Gamma \rangle}^{(r)}(T; \xi, u)$

dove  $T_{\Gamma}^{(r)}$  è il sottoinsieme di  $T$  costituito dalle soluzioni "regolari".

In i) e ii) si può sostituire  $T$  con  $A$ .

Per questi ed altri risultati dello stesso genere cfr. Tolstogov [21] e anche [18], [15], [34], [35]. Ricordiamo che  $\omega$  è una funzione di tipo Kamke.

Teorema 5. Supponiamo che la  $m$ -funzione  $\Gamma$  verifichi le condizioni

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{cont}]{\Gamma} \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Gamma(t, x) \subset MB, \quad 0 \leq M = \text{cost.}$$

$$h(\Gamma(t, x), \Gamma(t, y)) \leq \omega(t) \|x - y\|, \quad 0 \leq \omega \in L^1.$$

Allora valgono le seguenti affermazioni

i) Se  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è assolutamente continua e se



$$\rho(\dot{y}(t), \Gamma(t, y(t))) \leq \lambda(t), \lambda \in L^1,$$

allora esiste  $x \in T_\Gamma(T, \xi)$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$  arbitrario, tale che

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\xi - y(0)\| e^{\int_0^t \omega(s) ds} + \int_0^t \lambda(s) e^{\int_0^s \omega(\sigma) d\sigma} ds \equiv \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leq \omega(t) \phi(t) + \lambda(t)$$

ii)  $T_\Gamma(T, \cdot)$  è lipschitziana da  $\mathbb{R}^n$  a  $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ , ossia

$$h(T_\Gamma(T, \xi), T_\Gamma(T, \mu)) \leq C_T \|\xi - \mu\|, \quad C_T = \text{cost.}$$

Questo risultato è dovuto a Filippov. Per la dimostrazione cfr. Aubin-Cellina [6], Hermes [7].

Ora ci proponiamo di esporre alcuni risultati per le inclusioni differenziali con le traiettorie vincolate a variare, a volte in modo monotono rispetto a certe relazioni d'ordine parziale, su insiemi non (necessariamente) aperti.

Per questo ci occorrono due tipi di *cono tangente* a un insieme  $A \neq \emptyset$  in un suo punto, introdotti da Bouligand (il cono  $T(A; x)$ , cfr. Aubin [27] e Haddad [28]) e da Clarke [29] (il cono  $T^C(A; x)$ ):

$$T(A; x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\rho(x + \lambda v, A)}{\lambda} = 0\}, \quad x \in A$$

$$T^C(A; x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ x' \rightarrow x}} \frac{\rho(x' + \lambda v, A) - \rho(x', A)}{\lambda} \leq 0\}, \quad x \in A$$

Si dimostra che entrambi sono coni chiusi con vertice nell'ori

gine e che  $T(A;x) \supset T^C(A;x) = \text{convesso}$  (cfr. Clarke [29], Clarke-Aubin [30]).

L'inclusione può essere propria, come mostra il semplice esempio

$$A = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

per il quale si ha  $A = T(A;0) \neq T^C(A;0) = \{0\}$ .

Ricordiamo che un *preordine* sull'insieme  $X$  è una relazione  $\rho \subset X \times X$  riflessiva e transitiva. Se pensiamo  $\rho$  come grafico di una *m-funzione*, ciò si può scrivere nella forma

$$x \in \rho(x) \subset \rho(\rho(x)), \quad \forall x \in X.$$

Un primo risultato è il seguente

Teorema 6. Sia  $X \neq \emptyset$  un sottoinsieme localmente compatto di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $\rho : X \rightarrow X$  un preordine l.s.c. e con grafico chiuso e sia

$$X \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{\Gamma} \text{conv}(\mathbb{R}^n)$$

Allora sono equivalenti le affermazioni

- i)  $\Gamma(x) \cap T(\rho(x);x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in X,$
- ii) per ogni  $x_0 \in X$  esistono  $T > 0$  e una funzione lipschitziana  $x:[0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad x(t) \in X, \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \\ t < t' &\Rightarrow x(t') \in \rho(x(t)). \end{aligned}$$

Questo risultato è dovuto a Haddad [28], che ha pure trattato il caso di  $\Gamma$  dipendente dal tempo (in assenza di ordine  $\rho$ ). Viene inoltre osservato che se  $X$  è chiuso e  $\Gamma$  limitata su  $X$  si può prendere la soluzione  $x(\cdot)$  in ii) definita su  $[0, +\infty[$ .

Nel caso non convesso abbiamo il seguente risultato

**Teorema 7.** Sia  $X \neq \emptyset$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $\rho : X \rightarrow \text{comp}(X)$  un preordine lipschitziano (nella metrica di Hausdorff) e sia

$$X \xrightarrow[\text{continua}]{\Gamma} \text{comp}(X)$$

se vale la condizione

$$\Gamma(x) \subset T^C(\rho(x); x), \quad \forall x \in X,$$

allora, per ogni  $x_0 \in X$ ,  $v_0 \in \Gamma(x_0)$  e  $T > 0$ , esiste una funzione "regolare"  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(t) \in X, \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \\ t < t' &\rightarrow x(t') \in \rho(x(t)). \end{aligned}$$

Questo risultato è dovuto a Clarke-Aubin [30]. Gli Autori danno indicazioni sull'estensione al caso di  $\Gamma$  dipendente anche dal tempo e al caso di  $X = \text{compatto}$  in uno spazio di Banach (occorre la condizione

$$\sup_{\substack{x \in X \\ v \in \Gamma(x)}} \frac{\rho((x, x+\lambda v), \rho)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} 0$$



dove  $\rho$  è identificata al proprio grafico).

Osservazione. Se  $\Gamma$  è lipschitziana, ossia se verifica la condizione  $h(\Gamma(x), \Gamma(x')) \leq M \|x - x'\|$ , e se  $\rho(x) \equiv X$ , la condizione " $\Gamma(x) \subset T^C(\rho(x); x)$  per ogni  $x \in X$ " assicura che per ogni soluzione  $x(\cdot)$  si ha  $x(t) \in X$  per  $0 \leq t \leq T$  (cfr. Clarke [29]).

Per altri risultati nello stesso ordine di idee cfr. Aubin [1].  
Aubin [27] ha studiato il problema

$$(P) \begin{cases} \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)), x(0) = x_0, x(t) \in X \text{ per } 0 \leq t \leq T, \\ V(x(t')) - V(x(t)) + \int_t^{t'} W(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \leq 0 \text{ per } 0 \leq t \leq t' \end{cases}$$

dove  $X$  è un sottoinsieme chiuso di  $R^n$  e

$$X \xrightarrow[u.s.c.]{\Gamma} \text{conv}(R^n)$$

$$X \xrightarrow{V} [0, +\infty[$$

$$X \times R^n \xrightarrow[l.s.c.]{W} [0, +\infty[, \quad W(x, \cdot) \text{ convessa}$$

Sempre in [27] Aubin ha introdotto e studiato la derivata contingente superiore di una funzione

$$V : X \rightarrow R,$$

che possiamo così definire

$$D_+ V(x_0)(u_0) = \liminf_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow u_0}} \frac{V(x_0 + \lambda u) - V(x_0)}{\lambda}$$

Se  $x_0$  è interno a  $X$  e  $V$  è localmente lipschitziana in  $x_0$ , si ha

$$D_+ V(x_0)(u_0) = \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{V(x_0 + \lambda u_0) - V(x_0)}{\lambda}$$

Tuttavia questa formula non vale per  $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \ni (0,1) = u_0$ ,

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = (0,0) \\ \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & , x \neq 0 \end{cases}$$

La derivata  $D_+ V(x_0)$  è suscettibile della seguente interpretazione geometrica: il suo epigrafico coincide col cono tangente in  $(x_0, V(x_0))$  all'epigrafico della  $V$  (cfr. [27]).

Fra i diversi risultati contenuti in [27] figurano anche quelli riassunti nel seguente

Torema 8. Sotto le condizioni indicate sopra, valgono le affermazioni:

- i) Se per ogni  $x_0 \in X$  esiste una soluzione del problema (P), con  $T > 0$ , allora

$$(L) \quad \forall x \in X, \exists v \in \Gamma(x): D_+ V(x)(v) + W(x, v) \leq 0$$

- ii) Se  $V$  e  $W$  sono continue e verificano la condizione (L), il problema (P) ha soluzione per ogni  $x_0 \in X$ , con  $T > 0$  (Se  $\Gamma$  è limitata su  $X$  si può prendere  $T = +\infty$ ).

iii) Se  $W(x,v) = \|v\|$  e  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una soluzione del problema (P), allora esiste  $x_* \in X$  tale che

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x_*, \quad 0 \in \Gamma(x_*), \quad V(x(t)) \rightarrow V(x_*).$$

Nel caso di  $\Gamma$  "dipendente dal tempo" si ha il seguente

Teorema 8'. Supponiamo che la m-funzione  $\Gamma$  e le funzioni  $V$  e  $W$  verifichino le condizioni

$$[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \supset K \xrightarrow[u.s.c.]{\Gamma} \text{conv}(\mathbb{R}^n), \quad \Gamma \text{ limitata}$$

$$K \xrightarrow[\text{cont}]{V} [0, +\infty[$$

$$K \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{cont}]{W} [0, +\infty[, \quad W(t,x,\cdot) \text{ convessa}$$

con  $K$  chiuso. Allora sono equivalenti le affermazioni

i) per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tale che  $(0, \xi) \in K$ , esiste una soluzione  $x \in T_\Gamma([0, +\infty[, \xi)$  verificante le condizioni

$$(t, x(t)) \in K \quad \text{per } t \geq 0,$$

$$0 \leq t \leq t' \Rightarrow V(t', x(t')) - V(t, x(t)) + \int_0^{t'} W(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \, d\tau \leq 0$$

ii) per ogni  $(t, x) \in K$  esiste  $v \in \Gamma(t, x)$  tale che

$$D_+ V(t, x)(1, v) + W(t, x, v) \leq 0$$

Questo è un risultato di Aubin [27].

Vogliamo concludere con alcuni risultati relativi alle "inclusioni di tipo gradiente"

$$\dot{x}(t) \in -\partial V(x(t))$$

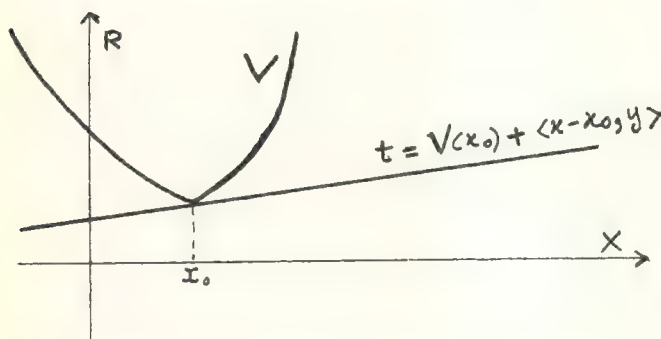
con  $V =$  funzione convessa definita su uno spazio di Hilbert reale  $X$

$$X \xrightarrow{V} ]-\infty, +\infty]$$

$$D(V) = \{x \in X \mid V(x) < +\infty\}$$

Ricordiamo la definizione di *sub-differenziale* di  $V$  in  $x_0$ :

$$\partial V(x_0) = \{y \in X \mid \forall x \in X : V(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle \leq V(x)\}$$



Gli elementi di  $\partial V(x_0)$  si dicono sub-gradienti di  $V$  in  $x_0$ . Per esempio si ha

$$\partial \|\cdot\| (x_0) = \begin{cases} \left\{ \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\} & \text{se } x_0 \neq 0 \\ \{y \in X \mid \|y\| \leq 1\} & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}$$



$$\partial|\cdot|(x_0) = \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x_0 < 0 \\ [-1,1] & \text{se } x_0 = 0 \\ \{1\} & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$$

E' noto (cfr. Castaing-Valadier [9], per esempio) che se  $V$  è l.s.c. oltre che convessa, si ha

- $\partial V(x) \neq \emptyset$  convesso e chiuso per ogni  $x \in D(\partial V) = \{x \in D(V) | \partial V(x) \neq \emptyset\}$  e  $D(\partial V)$  è denso in  $D(V)$ ;
- $\partial V$  è una  $m$ -funzione monotona massimale, ossia verifica la condizione

$$y_i \in \partial V(x_i) \Rightarrow \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

e  $\partial V$  non è propriamente prolungabile in alcuna  $m$ -funzione che verifichi la stessa condizione.

Ora siamo in condizioni di enunciare il seguente

Teorema 9. Sia  $X$  uno spazio di Hilbert reale e sia

$$X \xrightarrow[\text{l.s.c.}]{V} ]-\infty, +\infty] \quad \text{convessa}$$

con  $D(V) \neq \emptyset$ . Allora valgono le affermazioni:

- i) Per ogni  $x_0 \in D(\partial V)$  esiste una e una sola funzione assolutamente continua  $x : [0, +\infty[ \rightarrow X$  tale che

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \in D(\partial V), \quad \dot{x}(t) \in -\partial V(x(t));$$

inoltre la funzione  $t \rightarrow V(x(t))$  è decrescente, convessa e verifica la condizione

$$\frac{d^+}{dt} V(x(t)) + \|\dot{x}(t)\|^2 = 0.$$

ii) Se  $x_i(\cdot)$  è la soluzione di dato iniziale  $x_i \in D(\partial V)$  si ha

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

iii) Se la funzione  $V$  è inferiormente semicompatta, ossia

$\{x \in X | V(x) \leq t\} = \text{compatto}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , allora la soluzione  $x(\cdot)$  considerata in i) converge a un *minimo*  $x_*$  di  $V$  che è anche punto stazionario di  $\partial V$ :

$$\|x(t) - x_*\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad 0 \in \partial V(x_*)$$

Per la dimostrazione cfr. Aubin-Cellina [6], Brezis [31]. Su questo tipo di inclusioni e su quello più generale in cui  $\partial V$  è sostituito da un operatore monotono massimale, anche nel caso dipendente dal tempo, esiste una vasta letteratura. Per questo cfr. Brezis [31], Da Prato [32], Attouch-Damlamian [33].

BIBLIOGRAFIA

- 1) AUBIN J.P.: Monotone evolution of resource allocations. Journal of Math. Econ. 6 (1979), 43-62.
- 2) FILIPPOV A.F.: On certain questions in the theory of optimal control. SIAM J.-A, Control 1 (1962), 76-84.
- 3) ROCKAFELLAR R.T.: Dual problems of Lagrange for arcs of bounded variation. Calculus of Variations and Control Theory (Edit. Russell), Academic Press, 1976, 155-192.
- 4) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle inclusioni differenziali negli spazi di Banach e selezioni continue. ΔAH CCCP, 244, 5 (1979).
- 5) DIEUDONNE J.: Foundations of modern analysis. Academic Press, 1960.
- 6) AUBIN J.P.-CELLINA A.: Differential Inclusions (in corso di stampa).
- 7) SMITHSON R.E.: Multifunctions. Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XX, (1972), 31-53.
- 8) BOURBAKI N.: elements de Mathematique Topologie generale, Chap. 1 Hermann.
- 9) CASTAING C.-VALADIER M.: Convex analysis and measurable multifunctions. LNM n. 580 (1977).
- 10) LASRY J.M.-ROBERT R.: Analyse non lineaire multivoque. Cahiers de Mathematiques de la Decision n. 7611, Universite de Paris IX Dauphine.
- 11) MICHAEL E.: Continuous Selections, I. Ann. of Math. 63 (1956), 361-62.
- 12) HADDAD J.: Topological properties of the set of solutions for functional differential inclusions. Nonlinear Anal. T.M.A. 5, 12 (1981), 1349-66.
- 13) WAGNER D.H.: Survey of measurable selection theorems. SIAM J. Control.

Opt. 15 (1977), 859-903.

- 14) WAGNER D.H.: Survey of measurable selection theorems: an update. LNM n. 794 (1980).
- 15) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. Esistenza delle soluzioni. Sib. M. J. 22, 4 (1981), 182-198.
- 16) AUMANN R.J.: Integrals of set-valued functions. J. Math. An. Appl. 12 (1965), 1-12.
- 17) HERMES H.: The generalized differential equation  $\dot{x} \in R(t, x)$ . Advances in Math. 4 (1970), 149-69.
- 18) TOLSTONOGOV A.A.: Sulla densità ed estremalità degli insiemi di soluzioni di un'inclusione differenziale negli spazi di Banach. ΔAH CCCP 261, 2 (1981), 293-96.
- 19) DAVY J.L.: Properties of the solution set of a generalized differential equation. Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972), 379-98.
- 20) FILIPPOV A.F.: Sulle condizioni di esistenza delle soluzioni per le equazioni differenziali multivoche. Diff. Urav. 13, 6 (1977), 1070-78.
- 21) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle proprietà delle soluzioni delle inclusioni differenziali in uno spazio di Banach. ΔAH CCCP 248, 1 (1979).
- 22) TOLSTONOGOV A.A.: Teoremi di confronto per inclusioni differenziali in uno spazio localmente convesso. I. Esistenza delle soluzioni. Diff. Urav. 17, 4 (1981), 651-59/II. Proprietà delle soluzioni. Ibidem 17, 6 (1981), 1016-24.
- 23) LOJASIEWICZ jr. S.: The Existence of Solutions for Lower Semicontinuous Orientor Fields. Bull. Acad. Polon. des Sciences. Ser. sci. math. 28, 9-10 (1980), 483-87.



- 24) KACZYNSKI H.-OLECH C.: Existence of solutions of orientor fields with non-couvéx right-hand side. *Ann. Pol. Math.* 29 (1974), 61-66.
- 25) OLECH C.: Existence of solutions of non couvéx orientor fields. *Boll. UMI* (4), 11, 3 Suppl. (1975), 189-97.
- 26) PIANIGIANI G.: On the fundamental theory of multivalued differential equations. *Journ. Diff. Equat.* 25 (1977), 30-38.
- 27) AUBIN J.P.: Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. *Mathematical Analysis and Applications. Part A. Advances in Math. Suppl. Studies*, vol. 7A (L. Nachbin Edit.). Acad. Press (1981), 159-229.
- 28) HADDAD G.: Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory. *Israel. J. Math.* 39, 1-2 (1981), 83-100.
- 29) CLARKE F.H.: Generalized gradients and applications. *Trans. A.M.S.* 205 (1975), 247-262.
- 30) CLARKE F.H.-AUBIN J.P.: Monotone invariant solutions to differential inclusions. *Jour. London M.S.* (2), 16 (1977), 357-66.
- 31) BREZIS H.: *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espace de Hilbert.* LNM, North-Holland, 1973.
- 32) DA PRATO G.: *Applications croissantes et equations d'evolutions dans les espaces de Banach.* Academic Press, 1976.
- 33) ATTOUCH H.-DAMLAMIAN A.: Problemes d'evolution dans les Hilberts et applications. *J. Math. Pures Appl.* 54 (1975), 53-74.
- 34) TOLSTONOGOV A.A.: Sui teoremi di confronto per le inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. I. Esistenza delle soluzioni. in: *Funzioni vettoriali di Liapunov e lo ro costruzione.* Novosibirsk, NAUKA, 1980, 6-34.

- 35) TOLSTONOGOV A.A.: Sui teoremi di confronto per le inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. II. Soluzioni globali. in: Metodo diretto nella teoria della stabilità e sue applicazioni. Novosibirsk; NAUKA, 1981, 18-34.
- 36) ANTOSIEWICZ H.A.-CELLINA A.: Continuous selections and differential relations. Journ. of Diff. Eq. 19 (1975), 386-98.